Cálculo Numérico

Teoria dos erros

Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Centro Universitário de Juazeiro do Norte
Uninassau

- A base decimal ($\beta = 10$) usa os dígitos de 0 a 9.
- Um número N pode ser escrito como:

$$N = \sum_{i=-m}^{n} d_i \times 10^i, \quad 0 \leq d_i \leq 9$$

- Exemplo:

$$347.52 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

- **Decimais finitos:** terminam após um número limitado de casas.

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{3}{4} = 0.75$$

- **Decimais periódicos:** apresentam repetição infinita de dígitos.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}, \quad \frac{7}{6} = 1.1\overline{6}$$

- Regra: decimal finito ocorre apenas quando o denominador (em forma irredutível) tem fatores primos 2 e/ou 5.

- Nem todo decimal finito é finito em outras bases.
- Exemplo:

$$0.1_{10} = 0.0001100110011\ldots_2 \quad \text{(periódico em binário)}$$

- Isso explica por que certas somas no computador não são exatas:

$$0.1 + 0.2 \neq 0.3 \quad \text{(exatamente)}$$

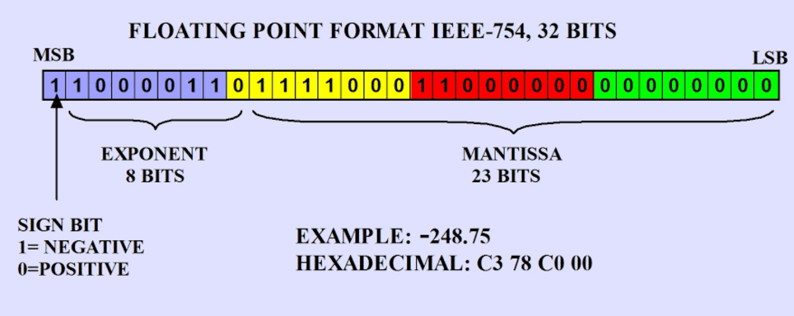
- Analogamente, um número finito em binário pode ser infinito em decimal.

Motivação: Por que ponto flutuante importa?

- Computadores não representam todos os números reais exatamente.
- Apenas um subconjunto de números racionais pode ser armazenado em hardware.
- O padrão mais comum: **IEEE 754**.

Consequência: Surgem erros de *arredondamento* inevitáveis.

Formato IEEE 754 — visão geral



- **Sinal** (1 bit): indica positivo ou negativo.
- **Expoente** (8 bits em simples, 11 bits em dupla): determina escala.
- **Mantissa** (23 bits em simples, 52 bits em dupla): guarda dígit[illegible].

Tabela comparativa — simples vs dupla precisão

	Simples (32 bits)	**Dupla (64 bits)**
Bits de sinal	1	1
Bits de expoente	8	11
Bits de mantissa	23	52
Precisão (dígitos decimais)	≈ 7	≈ 16
Unidade de arredondamento u	$\approx 5.96 \times 10^{-8}$	$\approx 1.11 \times 10^{-16}$

Vamos representar $x = 13.25$ em ponto flutuante binário (IEEE 754 simples):

1. Converter para binário: $13_{10} = 1101_2$, $0.25_{10} = 0.01_2$, logo 1101.01_2.
2. Notação normalizada: $1.10101_2 \times 2^3$.
3. Sinal: 0 (positivo).
4. Expoente: $3 + 127 = 130_{10} = 10000010_2$.
5. Mantissa: 10101000000000000000000.

- Cálculo Numérico envolve: solução de equações (lineares, não lineares e transcendentes), interpolação, ajuste de curvas, integração numérica, EDOs, ...
- Em todas essas etapas há incertezas: dados imperfeitos, modelos aproximados e operações finitas.
- A **Teoria dos Erros** descreve, mede e controla essas incertezas para garantir resultados confiáveis.

Pista circular de raio $r = 50\,\text{m}$. Um atleta dá 10 voltas. Comprimento: $C = 2\pi r$.

Valor de π	C (1 volta)	10 voltas
3,14	$2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314\,\text{m}$	$3140\,\text{m}$
3,1416	$314{,}16\,\text{m}$	$3141{,}6\,\text{m}$
3,14159265	$314{,}159\,265\,\text{m}$	$3141{,}592\,65\,\text{m}$

Ideia central

Quanto mais preciso for o valor de π, mais preciso é o resultado — mas sempre haverá uma diferença entre aproximação e valor verdadeiro: **erro**.

- Objetivo 1: obter, a partir de dados experimentais, a **melhor estimativa** (em termos estatísticos) do valor verdadeiro.
- Objetivo 2: quantificar a **incerteza** dessa estimativa, expressando o *grau de precisão e confiança*.

Valor verdadeiro (x) valor exato (geralmente desconhecido).

Valor aproximado ($\tilde{x}$) resultado obtido por medição ou algoritmo.

Erro diferença entre x e $\tilde{x}$; pode ter várias origens.

Erro na origem dos dados (entrada)

Surge durante a coleta/medição:

- **Instrumentos limitados**: resolução, calibração e ruído.
- **Procedimentos inadequados**: método de leitura/registro.
- **Fator humano**: erros de leitura, transcrição, interpretação.
- **Modelagem física**: simplificações necessárias para descrever fenômenos reais.

É inerente ao uso de processos infinitos representados por expressões finitas.

- **Séries infinitas** aproximadas por um número finito de termos.
- **Linearização** (ex.: série de Taylor) ignorando termos de ordem superior.

Exemplo

Série de Taylor da exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

onde $R_n(x)$ é o **termo de resto** (erro de truncamento) ao parar em n termos.

Surgem ao limitar casas decimais. Pela **ABNT NBR 5891:2014**:

1. Se o algarismo seguinte ao último a manter for < 5, mantém-se.
2. Se for ≥ 5 e houver algum dígito diferente de zero adiante, *arredonda-se para cima*.
3. Se for 5 seguido de zeros, *arredonda-se para o par mais próximo* (regra do *round half to even*).

Exemplos

14,9834 $\to$ 14,98;   4,6691 com 2 decimais $\to$ 4,67;
0,63500 com 2 decimais $\to$ 0,64;   10,6650 com 2 decimais $\to$ 10,66.

Erro absoluto

$$\mathrm{E_A} = |x - \tilde{x}|.$$

Erro relativo

$$\mathrm{E_R} = \frac{\mathrm{E_A}}{|x|} \quad \left(\text{ou } \frac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}|} \text{ quando } x \text{ é desconhecido}\right).$$

Erro percentual

$$\mathrm{E_P} = 100\,\mathrm{E_R}\,\%.$$

- **Exatidão**: proximidade ao valor verdadeiro.
- **Precisão**: reprodutibilidade (baixa variabilidade entre medidas).
- **Tolerância**: limite aceitável para o erro numa aplicação.

Observação

Sistemas podem ser precisos sem serem exatos e vice-versa; idealmente, queremos ambos.

O número de Euler é irracional (infinitas casas decimais). Usando n termos da série:

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

- O **erro de truncamento** é $R_n(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
- A **cota de erro** pode ser estimada por $\dfrac{1}{(n+1)!}$.

Como mitigar e controlar erros

- Calibração e escolha adequada de instrumentos de medição.
- Modelos com validação/ajuste a dados e análise de sensibilidade.
- Algoritmos numericamente estáveis; uso de *guard digits* ao arredondar.
- Definir tolerâncias e critérios de parada coerentes com a aplicação.
- Relatar sempre a precisão (casas significativas) e a incerteza.

1. Para $r = 50\,\text{m}$ e 10 voltas, calcule o erro absoluto e percentual de usar $\pi = 3{,}14$ e $\pi = 3{,}1416$ em relação a $\pi = 3{,}14159265$.
2. Arredonde para duas casas: 7,2450, 9,99500, 12,5000 e explique a regra aplicada.
3. Use 5 termos da série para aproximar e e estime a cota do erro.